Réseaux & Protocoles
TD 02 : La couche physique
L3 IUP 2005-2006

Exercice 1 : Rapport Signal/Bruit

Rappels :

$$\frac{signal \quad \longrightarrow \text{puissance du signal transmis}}{bruit \quad \longrightarrow \text{puissance des signaux parasites}}$$

Dans la suite, $\frac{P_a}{P_b}$ représentera un rapport de puissance ou d'énergie. Ce n'est pas nécéssairement un rapport signal sur bruit. En décibels, le rapport vaut par définition :

$$d = 10\log_{10}\left(\frac{P_a}{P_b}\right) \Longleftrightarrow \frac{P_a}{P_b} = 10^{\frac{d}{10}}$$

On rappel aussi que :

$$\log_x x^i = i$$

Exercices :

- A quels rapports correspondent 10 dB, 3 dB, 40 dB, 37 dB ?
- Convertir en décibels les rapports suivants : $P_a/P_b = 2000, 500, 100000$

Solution :

- $10 = 10\log_{10}(\frac{P_a}{P_b}) \Rightarrow \frac{P_a}{P_b} = 10^{\frac{10}{10}} = 10$
- $3 = 10\log_{10}(\frac{P_a}{P_b}) \Rightarrow \frac{P_a}{P_b} = 10^{\frac{3}{10}} = 1.995 \approx 2$
- $40 = 10\log_{10}(\frac{P_a}{P_b}) \Rightarrow \frac{P_a}{P_b} = 10^{\frac{40}{10}} = 10000$
- $37 = 10\log_{10}(\frac{P_a}{P_b}) \Rightarrow \frac{P_a}{P_b} = 10^{\frac{37}{10}} = 10^{\frac{40-3}{10}} = \frac{10^{\frac{40}{10}}}{10^{\frac{3}{10}}} \approx \frac{10000}{2} \approx 5000$

- $\frac{P_a}{P_b} = 2000 \Rightarrow d = 10\log_{10}(2000)) = 10\log_{10}(2 \times 10^3) = 10\log_{10}(2) + 10\log_{10}(10^3) \approx 10 \times 0.3 + 10 \times 3$
  $\Rightarrow d \approx 33dB$
- $\frac{P_a}{P_b} = 500 \Rightarrow d = 10\log_{10}(500)) = 10\log_{10}(\frac{1000}{2}) = 10\log_{10}(10^3) - 10\log_{10}(2) \approx 10 \times 3 - 10 \times 0.3$
  $\Rightarrow d \approx 27dB$
- $\frac{P_a}{P_b} = 100000 \Rightarrow d = 10\log_{10}(10^5)) = 10 \times 5 \Rightarrow d = 50dB$

Exercice 2 : Echantillonnage, Nyquist

Rappels :

Supposons que nous avons des signaux dépendant d'une horloge et T la période de l'horloge. Le moment élémentaire $\triangle$ est le plus petit intervalle de temps pendant lequel le signal reste constant. Si pendant la période T les signaux ne peuvent que rester constant alors $T = \triangle$. $\triangle$ peut aussi être appelé dans un contexte plus abstrait ***l'intervalle significatif*** du signal.

La rapidité de modulation *R* est le nombre de fois où un tel signal peut changer de niveau en 1 seconde. C'est l'inverse de $\triangle$.

$$R = \frac{1}{\triangle}$$

où *R* s'exprime en Bauds et $\triangle$ en secondes.

Lorsqu'un signal est bivalent (il n'a que deux valeurs 0 ou 1) il ne peut véhiculer qu'un seul bit d'information par période. S'il est quadrivalent (4 niveaux), alors chaque niveau véhicule 2 bits. Avec 8 niveaux, ce sera 3 bits, etc. Le nombre de niveau dans un signal est la *valence* du signal. De manière générale :

$$D = R \log_2(V)$$

où D est le débit (en bits/s), R la rapidité de modulation (en Bauds) et V la valence du signal.

Nyquist

On s'intéresse d'abord à la discrétisation dans le temps, avant de s'intéresser à la discrétisation des niveaux du signal.

Si un signal continu $s(t)$ a une fréquence maximale de f_{max}, et si on l'échantillonne à une fréquence de $f_{ech} = 2f_{max}$, ou plus, alors on est certain de pouvoir reconstituer le signal de départ $s(t)$ à partir du signal échantillonné dans le temps.

En particulier si on a un canal de bande passante *H*, alors tous les signaux qui passent à travers ce canal peuvent être échantillonnés avec une fréquence de $2H$ et ensuite être reconstitués à la réception. Si en plus le signal a un nombre limité de niveaux, alors on peut mesurer son débit binaire. Dans un canal avec une bande passante de largeur H, le débit binaire maximal est de :

$$D_{max} = 2H \log_2(V)$$

où D_{max} est le débit maximal (en bits/s), H la largeur de la bande passante (en Hz) et V la valence du signal.

Remarque : quand le nombre de niveaux V tend vers l'infini (on tend vers un signal avec des valeurs non discrètes) alors le débit binaire tend aussi vers l'infini.

Exercices :

On suppose que l'on a un signal dépendant d'une horloge dont la période est de 0.01ms et que pendant une période d'horloge le signal reste constant.

- Quelle est la rapidité de modulation d'un tel signal ? Quel est le débit binaire si le signal est bivalent ? s'il est quadrivalent ?
- Avec un tel signal et une rapidité de modulation de 10^5 Bauds, quelle est la valence nécessaire pour avoir un débit binaire de 800 Kbits/s ?

– Quelle est la largeur de bande minimale de la liaison transportant un tel signal ? (reprendre R, D et V de la question précédente)

Solutions :

– $R = \frac{1}{\triangle}$ où $\triangle$ est le plus petit intervalle de temps où le signal reste constant. Or comme pendant une période d'horloge le signal ne varie pas, on a $\triangle = T$ donc :

$$R = \frac{1}{\triangle} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.00001} = 10^5 \text{ Bauds}$$

– Si le signal est bivalent, on transporte 1 bit par période, donc :

$$D = R\log_2(V) = 10^5 \log_2(2) = 10^5 \text{ bits/s} = 100 \text{ Kbits/s}$$

– Si le signal est quadrivalent, on transporte 2 bits par période, donc :

$$D = R\log_2(V) = 10^5 \log_2(4) = 10^5 \times 2 = 2 \times 10^5 \text{ bits/s} = 200 \text{ Kbits/s}$$

– Si R = 10^5 Bauds et D = 800 Kbits/s alors :

$$D = R\log_2(V) \Rightarrow \log_2(V) = \frac{D}{R} \Rightarrow V = 2^{\frac{D}{R}} \Rightarrow V = 2^{\frac{8\times10^5}{10^5}} = 2^8 = 256$$

– Le théorème de Nyquist nous donne :

$$D_{max} = 2H\log 2(V) \Rightarrow H = \frac{D_{max}}{2\log_2(V)} \Rightarrow H = \frac{8\times10^5}{2\log_2(256)} = \frac{8\times10^5}{2\log_2(2^8)} = \frac{8\times10^5}{2\times8} = \frac{10^5}{2} = 50000 \text{ Hz}$$

Exercice 3 : Shannon

Rappels :

En présence de bruit, le débit binaire va diminuer. Le théorème de Shannon nous permet de calculer un débit par rapport à la largeur de la bande passante H et du rapport signal/bruit $\frac{P_a}{P_b}$:

$$D = H\log_2(1 + \frac{P_a}{P_b})$$

où D est le débit binaire (en bits/s), H la largeur de la bande passante (en Hz) et $\frac{P_a}{P_b}$ le rapport signal/bruit.

Exercices :

– Calculer le débit binaire maximal sur une ligne téléphonique avec un rapport signal/bruit de 30 dB et une largeur de bande de 3000Hz.
– Si la modulation est de 6000 Bauds, quelle est la valence minimale pour avoir un tel débit ?
– Calculer le débit binaire maximal sur une liaison satellite dotée d'une largeur de bande de 10Mhz et d'un rapport signal/bruit de 20dB.

Corrections :

– On commence par convertir le rapport signal/bruit :

$$30 = 10\log_{10}\left(\frac{P_a}{P_b}\right) \Rightarrow \frac{P_a}{P_b} = 10^{\frac{30}{10}} = 10^3$$

Puis on calcul le débit :

$$D = H \log_2\left(1 + \frac{P_a}{P_b}\right) \Rightarrow D = 3000 \times \log_2(1 + 10^3) \approx 3000 \times \log_2(2^{10}) \approx 3000 \times 10 \approx 30 \text{ Kbits/s}$$

– Si la rapidité de modulation est de 6000 Bauds, on a :

$$D = R\log_2(V) \Rightarrow \log_2(V) = \frac{D}{R} \Rightarrow V = 2^{\frac{D}{R}} = 2^{\frac{30\times 10^3}{6000}} = 2^{\frac{1000}{200}} = 2^5 = 32$$

– On commence par convertir le rapport signal/bruit :

$$20 = 10\log_{10}\left(\frac{P_a}{P_b}\right) \Rightarrow \frac{P_a}{P_b} = 10^{\frac{20}{10}} = 100$$

Puis on calcul le débit :

$$D = H \log_2\left(1 + \frac{P_a}{P_b}\right) \Rightarrow D = 10^7 \times \log_2(1 + 100) \approx 10^7 \times \log_2(2^7) \approx 10^7 \times 7 \approx 70 \text{ Mbits/s}$$

Exercice 4 : Transformée de Fourier

Rappels :

Une fonction $s(t)$ périodique de fréquence f, régulière par morceaux peut être décomposée en une série de Fourier :

$$s(t) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi n f t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\pi n f t)$$

où

$$\begin{aligned} c &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(2\pi n f t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(2\pi n f t)dt \end{aligned}$$

avec $f = 1/T$ fréquence du signal, $C/2$ composante continue (valeur moyenne du signal), a_n et b_n les coefficients de Fourier (donnent les amplitudes respectives des sinus et cosinus de rang n).

L'intérêt des series de Fourier (dans le contexte de cd TD) est simplement de montrer que les signaux ont un certain encombrement dans l'espace des fréquences et que même pour transmettre des signaux numériques, il faut une certaine largeur de bande.

Exercices :

On veut faire passer sur un canal un signal binaire avec une période d'horloge de $T/2$. Ce signal est constant sur chaque période d'horloge et vaut 0 ou $+A$, valeurs qui codent respectivement le bit 0 et le bit 1. On admettra que pour qu'un tel signal (non nécessairement périodique) puisse passer sur le canal, il faut et il suffit que le canal puisse véhiculer d'une part un signal constant (codage de 000000000... ou 11111111...) et d'autre part qu'il puisse véhiculer un signal qui change de valeur à chaque top d'horloge. (codage 1010101010...). Ce dernier signal est un signal carré $g(t)$ de période T.

- Calculer la série de Fourier de $g(t)$.
- Supposons que la bande passante du médium est de [0,10.1kHz]. Quel est le nombre d'harmoniques qui passent si T = 1ms ?
- Même question pour T = 10ms, T = 0.1ms
- A présent, supposons que T = 1ms et prenons différents média avec différentes bandes passantes. Combien d'haromniques passent sans atténuation si la bande passante du médium est l'intervalle [0,4kHz] ?
- Même question pour une bande passante de [0,500Hz], [0,31kHz] et [1.2kHz,50kHz] ?
- Dans cet exercice, on supposera que N harmoniques suffisent pour représenter le signal si et seulement si :

$$\sum_{k>N}(a_k^2+b_k^2) \leq 0.02A^2$$

  où a_k et b_k sont les coefficients de Fourier. On sait que :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

  Montrer qu'il faut environ 10 harmoniques pour que $g(t)$ soit reçu convenablement.
- Donner la largeur minimale de la bande passante du médium capable de véhiculer un tel signal.

Corrections :

- On a :

$$g(t)=\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin(2\pi nft)+b_n\cos(2\pi nft))$$

  On calule la composante continue :

$$\begin{aligned}
c &= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)dt=\frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} g(t)dt+\int_{T/2}^{T} g(t)dt\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} Adt+\int_{T/2}^{T} 0dt\right)=\frac{2}{T}([At+M]_0^{T/2}+[K]_{T/2}^{T})\\
&= \frac{2}{T}\left(\frac{A\times T}{2}+0\right)=A
\end{aligned}$$

  On calcul le coefficent a_n :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin(2\pi nft)dt=\frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} g(t)\sin(2\pi nft)dt+\int_{T/2}^{T} g(t)\sin(2\pi nft)dt\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} A\sin(2\pi nft)dt\right)=\frac{2}{T}\left[\frac{-A\cos(2\pi nft)}{2\pi nf}\right]_0^{T/2}\\
&= \frac{2}{T}\left(\frac{-A\cos(2\pi nfT/2)}{2\pi nf}+\frac{A\cos(0)}{2\pi nf}\right)=\frac{2}{T}\left(\frac{-A\cos(2\pi nfT/2)+A}{2\pi nf}\right)\\
&= -\frac{A}{T}\left(\frac{\cos(\pi nfT)-1}{\pi nf}\right)=\frac{A}{T}\left(\frac{-\cos(\pi n)+1}{\pi nf}\right)=\frac{A}{Tnf\pi}(-\cos(\pi n)+1)\\
&= \frac{A}{n\pi}(-\cos(\pi n)+1)=\begin{cases}0 & \text{si n est pair}\\ \frac{2A}{n\pi} & \text{si n est impair}\end{cases}
\end{aligned}$$

Le coefficient $b_n = 0$ donc :

$$g(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{n impair}}}^{\infty} \left(\frac{2A}{n\pi} \sin(2n\pi f t) \right)$$

– Le nombre d'harmonique est :

$$\begin{aligned} 0 &\leq nf \leq 10.1 \times 10^3 \\ 0 &\leq n \leq 10.1 \times 10^3 \times \frac{1}{f} = 10.1 \times 10^3 \times T = 10.1 \times 10^3 \times 10^{-3} \\ 0 &\leq n \leq 10.1 \end{aligned}$$

Les harmoniques passantes correspondent à n=1,2,3,....10 $\Rightarrow$ il y a 10 harmoniques qui passent.

– Si $T = 10ms$ on a 101 harmoniques qui passent.
Si $T = 0.1ms$ on a 1 harmonique qui passe.

– Si la période $T = 1ms$ alors la fréquence des premières harmoniques est de $f_1 = 1kHz$, $f_2 = 2kHz$, $f_3 = 3kHz$, ..., $f_n = nkHz$. Donc si la bande passante est de [0,4kHz], il passe 4 harmoniques.

– Avec [0,500Hz] il ne passe aucune harmonique et avec [0,31kHz] il passe 31 harmoniques et avec [1.2kHz, 50kHz] il passe 49 harmoniques, mais la fréquence fondamentale ne passe pas.

– On a :

$$\sum_{k>N} (a_k^2 + b_k^2) \leq 0.02A^2$$

et l'on doit vérifier si cette condition est vrai pour N = 10 :

$$\begin{aligned} \sum_{k>N} (a_k^2 + b_k^2) &= \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ k \geq 11}} \left(\frac{2A}{\pi k} \right)^2 = \sum_{i=5}^{\infty} \left(\frac{2A}{\pi(2i+1)} \right)^2 \text{ avec k = 2i+1} \\ &= \left(\frac{2A}{\pi} \right)^2 \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \left(\frac{2A}{\pi} \right)^2 \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} - \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{(2i+1)^2} \right] \\ &= \left(\frac{2A}{\pi} \right)^2 \left[\frac{\pi^2}{8} - \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{81} + \frac{1}{49} \right) \right] \\ &= A^2 \left[\frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} - \frac{1}{81} - \frac{1}{49} \right) \right] \\ &= 0.020A^2 \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k>10} (a_k^2 + b_k^2) \leq 0.02A^2 \Rightarrow \text{ donc 10 harmoniques suffisent.}$$

– Pour $T = 1ms$, la dernière harmonique aura une fréquence de 10kHz. Donc pour faire passer un tel signal carré, il faudra que la bande passante laisse passer les fréquences comprises dans [0,10kHz].