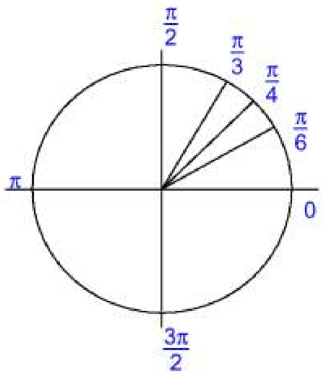
RAPPELS DE TRIGONOMETRIE

Valeurs et formules remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$

Formules d'addition

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

Formules de linéarisation

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\sin(2a)=2\sin a\cos a$$

Résolution d'équations

$\cos x=\cos\alpha \iff x=\alpha[2\pi]$ ou $x=-\alpha[2\pi]$

$\sin x=\sin\alpha \iff x=\alpha[2\pi]$ ou $x=\pi-\alpha[2\pi]$

RAPPELS DE GEOMETRIE

- Théorème de la médiane : soit ABC un triangle quelconque, et I le milieu de [BC], on a $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$
- Dans un triangle quelconque, l'équivalent du théorème de Pythagore est la relation d'Al Kashi : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
- L'aire d'un triangle est donné par : $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

  On en déduit : $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$
- Dans un repère orthonormal, un cercle de centre $\Omega(x_0;y_0)$ et de rayon R a pour équation : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

DERIVEE → PRIMITIVE

$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$u'e^u$	e^u
$(v'\circ u).u'$	$(v\circ u)$
$u^n u'$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$nu^{n-1}u'$	u^n
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\cos(ax+b)$	$\frac{\sin(ax+b)}{a}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}$

COMPLEXES

Equation du second degré

$az^2+bz+c=0 \qquad \Delta=b^2-4ac$

$z_1=\dfrac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

Module

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ est la longueur qui sépare l'origine et le point d'affixe z.

$|zz'|=|z|.|z'|$ $\qquad |z+z'|\le|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire) $\qquad \left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$

Conjugué

Le conjugué de $z=x+iy$ est $\bar{z}=x-iy$. On a les relations :

$z.\bar{z}=x^2+y^2 \qquad \overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}' \qquad \mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \qquad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'} \qquad \mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2}$

Arguments

$\arg(zz')=\arg z+\arg z' \qquad \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'$

$\arg(z^n)=n\arg z \qquad \arg(-z)=\arg z+\pi$

Notations trigonométriques et exponentielles

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique d'un complexe. On a $\mathrm{Re}(z)=r\cos\theta$ et $\mathrm{Im}(z)=r\sin\theta$. $z=re^{i\theta}$ est la forme exponentielle.

Formule de Moivre : $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

Formules d'Euler : $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Utilisation en géométrie

Considérons trois points distincts A, B et C dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)$ donne l'affixe de $\overrightarrow{AB}$.
- $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$ avec I le milieu de [AB].
- $z_G=\dfrac{az_A+bz_B}{a+b}$ avec G le barycentre de $\{(A;a),(B;b)\}$.
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\arg(z_C-z_A)-\arg(z_B-z_A)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=0[2\pi]$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Transformations

- M(z) → M'(z+a) est la translation de vecteur $\vec{v}$ (a).
- M(z) → $M'(ze^{i\theta})$ est la rotation de centre O et d'angle θ.
- $|z-z_A|=r$ définit le cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r.

LIMITES – ASYMPTOTES

Formes indéterminées

$+\infty-\infty$: factorisation du terme dominant (+ haut degré).

∞/∞ : factorisation du terme dominant, simplification.

$0/0$: factorisation du terme tendant vers 0, simplification.

$0\times\infty$: peut en général se ramener à ∞/∞ ou $0/0$.

Si des racines carrées interviennent, on pourra multiplier par la quantité « conjuguée ».

Propriétés

- $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et $\lim g(x)=\lim h(x)=l \quad\Rightarrow\quad \lim f(x)=l$
- $|f(x)-l|\leq g(x)$ et $\lim g(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim f(x)=l$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y)=l \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=l$

Limites usuelles

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du terme dominant. La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du quotient des termes dominants du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

Asymptotes

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \quad\Rightarrow$ asymptote verticale d'équation x=a
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b \quad\Rightarrow$ asymptote horizontale d'équation y=b
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0 \quad\Rightarrow$ asymptote oblique d'équation y=ax+b

DERIVEE

Nombre dérivé

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Pour que f soit dérivable en x_0, il faut que les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 soient finis et égaux. La tangente au point d'abscisse x_0 a pour équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Bijection

f est dérivable est strictement croissante sur [a;b] donc f réalise une bijection de [a;b] sur $[f(a);f(b)]$ et pour tout α de $[f(a);f(b)]$ l'équation $f(x)=\alpha$ admet une solution unique dans [a;b].

Inégalités des accroissements finis

f est dérivable sur [a;b] et pour tout x de [a;b] on a :

- m ≤ f'(x) ≤ M ⇒ m(b-a) ≤ f(b)-f(a) ≤ M(b-a)
- |f'(x)| ≤ M ⇒ |f(b)-f(a)| ≤ M |b-a|

Position de la courbe par rapport à la tangente

La position de (C) la courbe représentative de f par rapport à (T) la courbe représentative de g est donnée par le signe de h(x)=f(x)-g(x)
h>0 : (C) est au dessus de (G)
h<0 : (C) est au dessous (G)
h=0 : intersection des courbes (C) et (G)

RECURRENCE

Soit une propriété P dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

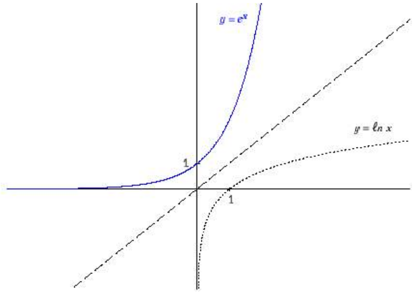
- Initialisation : Si $P(n_0)$ est vraie,
- Transmission : et si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$,
- Conclusion : alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

LOGARITHME NEPERIEN

- ln est une bijection strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$
- $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n>0)$
- $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$ $\qquad \ln(a^n) = n.\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\qquad \ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

FONCTION EXPONENTIELLE

- exp est une bijection strictement croissante de $]-\infty;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$
- $(e^u)' = u'.e^u$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n>0)$
- $e^{a+b} = e^a . e^b$ $\qquad e^{na} = (e^a)^n$ $\qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$



FONCTION PUISSANCES

$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. La dérivée $f'(x) = \alpha.x^{\alpha-1}$ est du même signe que α d'où la monotonie de f.

Pour $\alpha > 0$: $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

PARITE / SYMETRIE

- f est paire $\Leftrightarrow$ f est centré en 0 et f(-x)=f(x)
- f est impaire $\Leftrightarrow$ f est centré en 0 et f(-x)=-f(x)

- $(x_0 ; y_0)$ est centre de symétrie $\Leftrightarrow$ $f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2y_0$
- $x = x_0$ est axe de symétrie $\Leftrightarrow$ $f(x_0+h) = f(x_0-h)$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

- $y' = ay$ a pour solutions l'ensemble des fonctions définies par $f(x) = k.e^{ax}$ avec a et k des réels. La solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est la fonction définie par $f(x) = y_0.e^{x-x_0}$.

- $y'' + \omega^2 y = 0$ a pour solutions l'ensemble des fonctions définies par $f(x) = A\cos\omega.x + B\sin\omega.y$ avec ω, A et B des réels. La solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est la fonction définie par $y'(x_0) = y'_0$.

INTEGRALES

Définition

$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ est l'intégrale de f entre a et b.

$\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Si pour tout $x \in [a;b]$ on a $f(x) \le g(x)$, alors l'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes et les droites d'équations x=a et x=b est donnée en unité d'aire par $\int_a^b (g(t) - f(t))dt$.

Propriétés

- $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ $\qquad$ $\int_a^b (kf)(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$
- f est paire $\Leftrightarrow$ $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
- f est impaire $\Leftrightarrow$ $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$
- f est périodique de période T $\Leftrightarrow$ $\int_a^{a+T} f(t)dt = 2\int_0^T f(t)dt$
- $\int_a^c f(t)dt = \int_b^c f(t)dt + \int_a^b f(t)dt$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ (linéarité)

Théorème de la moyenne

La valeur moyenne de f est donnée par $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)dt$

f est dérivable sur [a;b] et pour tout x de [a;b] on a :

- m ≤ f(x) ≤ M ⇒ m(b-a) ≤ $\int_a^b f(t)dt$ ≤ M(b-a)
- |f(x)| ≤ M ⇒ $\left|\int_a^b f(t)dt\right|$ ≤ M(b-a)

Intégration par parties

$$\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)dt$$

Calcul de volumes

Pour un solide dont l'intersection avec le plan de cote z a pour aire S(z), le volume entre les plans de cote a et b est donné par :

$$V = \int_a^b S(z)dz$$

SUITES

Suites arithmétiques

- $U_{n+1} = U_n + r$
- $U_n = U_p + (n-p)r \Rightarrow U_n = U_0 + nr$
- $\sum_{i=0}^{n-1} U_i = nU_0 + \frac{n(n-1)}{2} r = n \times \frac{U_0 + U_{n-1}}{2}$

Suites géométriques

- $U_{n+1} = U_n q$
- $U_n = U_p \times q^{n-p} \Rightarrow U_n = U_0 \times q^n$
- $q \le -1 \Rightarrow (U_n)$ n'a pas de limite et diverge de U_0

  $0 \le |q| < 1 \Rightarrow (U_n)$ converge vers U_0

  $q > 1 \Rightarrow (U_n)$ tend vers $\pm\infty$
- $\sum_{i=0}^{n-1} U_i = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{U_0 - U_n}{1-q}$

Suites monotones, bornées, périodiques

- Si la fonction f est croissante sur $[a;+\infty[$, la suite définie par $U_n = f(n)$ est croissante pour $n \geq a$. Attention : la réciproque est fausse (la suite peut-être croissante alors que la fonction ne l'est pas).
- Une suite à la fois majorée et minorée est appelée suite bornée.
- (U_n) est périodique de période p lorsque $U_{n+p} = U_n$.

Limites de suites

- $\lim U_n - l = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$
- $|U_n - l| \leq V_n$ et $\lim V_n = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$
- $\left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \leq W_n \\ \lim V_n = \lim W_n = l \end{array}\right| \Rightarrow \lim U_n = l$ (Théorème des gendarmes)
- $\lim U_n = l$ et $\lim V_n = l'$ et $U_n \leq V_n \Rightarrow l \leq l'$
- $\lim U_n = l$ et $\lim V_n = l'$ et $l < l' \Rightarrow U_n < V_n$
- Les termes de (U_n) appartiennent à l'intervalle de la fonction f :
  $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{x \to l} f(x) = l' \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = l'$

BARYCENTRE

$\vec{v} = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right)$ est le vecteur associé à un système de points pondérés.

- $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = 0 \Rightarrow \vec{v}$ est constant, il est indépendant de M.
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \neq 0 \Rightarrow$ il existe un point G appelé barycentre du système,
  et vérifiant les deux propriétés équivalentes :

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MG} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \left(\alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right)}{\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i}$$

Propriétés

- On peut changer l'ordre des points pondérés.
- On peut multiplier tous les coefficients par un nombre $k \neq 0$.
- On peut remplacer une partie des points par leur barycentre partiel affecté de la somme leurs coefficients (associativité).
- Les coordonnées ou l'affixe du barycentre sont données par :

$$z_G = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} (\alpha_i z_i)}{\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i} \qquad x_G = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} (\alpha_i x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i} \qquad y_G = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} (\alpha_i y_i)}{\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i}$$

Isobarycentre

- L'isobarycentre des points $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est le barycentre de ces points tous affecté du même coefficient non nul.
- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu de [AB].
- L'isobarycentre de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC (point d'intersection des médianes).

Ensemble de points

- $MG = r \Rightarrow$ dans le plan : cercle de centre G et de rayon r.
  dans l'espace : sphère de centre G et de rayon r.
- $MG_1 = MG_2 \Rightarrow$ dans le plan : médiatrice de $[G_1G_2]$
  dans l'espace : plan médiateur de $[G_1G_2]$
- $\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = \vec{0} \Rightarrow$ plan : cercle de diamètre $[G_1G_2]$
  espace : sphère de diamètre $[G_1G_2]$

DENOMBREMENT

Cardinal d'un ensemble

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble. Soit A et B deux événements d'un univers fini Ω.
Dans tous les cas, $Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$.
Si A et B sont incompatibles, $Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)$.
Si complémentaires, $Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)=Card(\Omega)$.
Pour déterminer les cardinaux de certains ensembles, on s'aide de diagrammes, tableaux ou arbres ou schémas à case.

Arrangements

Un arrangement est une liste ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les n éléments d'un ensemble. On l'utilise par exemple pour un tirage avec ordre et sans remise.

$$A_n^p = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)=\frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutations

Une permutation est un arrangement des n éléments de l'ensemble. On l'utilise par exemple pour trouver tout les anagrammes d'un mot.

$$A_n^n = n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$$

Combinaisons

Une combinaison est une liste non-ordonnée de p éléments choisis parmi les n éléments d'un ensemble (une combinaison est une partie). On l'utilise pour un tirage sans ordre et sans remise.

$$C_n^p = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)}{p!}=\frac{A_n^p}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés des combinaisons

$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ (somme) $\quad C_n^p = C_n^{n-p}$ (parité)

$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

Les C_n^p sont données par le triangle de Pascal :

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	...
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
...									

Les coefficients des égalités remarquables sont ceux du triangle de Pascal. La formule du binôme de Newton les résume :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Pour a=b=1, on a un cas particulier et $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Le nombre de combinaisons d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Introduction aux probabilités

- Les formules pour les probabilités sont similaires à celles du cardinal (incompatibilité, complémentarité…).
- Lorsque tous les éléments d'un univers ont même probabilités, il y a équiprobabilité. La probabilité pour chaque élément est $\frac{1}{Card(\Omega)}$ et pour tout événement A, on aura $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

PROBABILITES

Probabilités conditionnelles

A et B sont deux événements et $p(B)\neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant que B est déjà réalisée est définie se note :

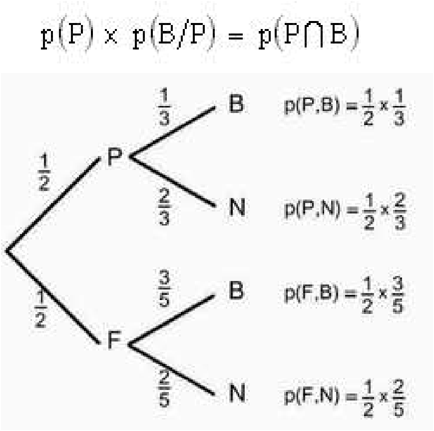
$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} \quad \Leftrightarrow \quad p(A\cap B)=p(A/B)\times p(B)$$

A et B sont indépendants lorsque $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$. On a donc :

$$p(A/B)=p(A) \text{ et } p(B/A)=p(B)$$

Arbres pondérés

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches de ce chemin.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités conduisant à cet événement.



Variable aléatoire

Une variable aléatoire X est une application de l'univers Ω dans R.

$$X \;:\; \Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\} \rightarrow X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

$(X=x_i)$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x_i.
La probabilité de l'événement $(X=x_i)$ est noté $p(X=x_i)=p_i$.

Etude d'une variable aléatoire

- On détermine la loi de probabilité de X en trouvant toutes les probabilités des événements associant une partie de l'univers aux différentes valeurs prises par la variable aléatoire.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1+p_2+\ldots+p_n=1$$

- La fonction de répartition est définie par $F(x)=p(X\leq x_i)$ pour tout réel x. C'est une fonction en escalier qui présente des « sauts ». Elle est croissante, minorée par 0 et majorée par 1.

- L'espérance mathématique, ou moyenne de X, est définie par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$$

- La variance de la variable aléatoire est un réel positif défini par :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i\right)-[E(X)]^2$$

- L'écart type de X est le nombre réel positif défini par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Schéma de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : le succès ou l'échec. Un schéma de Bernoulli est la répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

La loi binomiale permet de calculer la probabilité d'obtenir k succès. Soit p la probabilité du succès à chaque épreuve et X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des n épreuves :

$$P_k=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$$

PRODUITS SCALAIRE - VECTORIEL

Produit scalaire

- Le produit scalaire est une valeur numérique réelle. Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\times OH = OA\times OB\times\cos\left(\widehat{AOB}\right)$$

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ $\quad (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ $\quad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Norme et produit scalaire

- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ $\quad \|\vec{u}\pm\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\pm 2(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2}{2}$

Orthogonalité dans l'espace

- $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\pm\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Un vecteur est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.
- L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{u}\neq\vec{0}$.

Orientation de l'espace

Un repère est dit positif ou direct lorsque ses vecteurs unitaires respectent la règle des trois doigts de main **DROITE**.

Produit vectoriel

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est un troisième vecteur normal au plan formé par les deux autres vecteurs :

$$\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\| = OA\times OB\times\sin\left(\widehat{AOB}\right)$$

$\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$ est une base directe

- $\vec{u}\wedge\vec{v} = -(\vec{v}\wedge\vec{u})$ $\quad (k\vec{u})\wedge\vec{v} = k(\vec{u}\wedge\vec{v})$ $\quad \vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

Colinéarité et alignement

- $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ A, B, C sont alignés.

Expression analytique

- Soit $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ dans un repère orthonormal, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz'-zy' \\ Y = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = zx'-xz' \\ Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'-yx' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

- La norme du produit vectoriel de deux vecteurs est égale à l'aire du parallélogramme construit à partir de ces vecteurs. L'aire du triangle ABC est donc égale à la moitié de cette norme.

COURBES PARAMETREES

Représentation paramétrique d'une droite

Le système d'équations paramétriques de la droite (D) passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ détermine l'appartenance ou non d'un point de l'espace à la droite.

$$M(x;y;z)\in D \iff \begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \\ z = tc + z_A \end{cases}$$

Les coefficients du système sont les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite.

Equation cartésienne d'un plan

L'équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ détermine l'appartenance ou non d'un point de l'espace au plan.

$$M(x;y;z)\in(P) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$
$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$ax+by+cz+d=0$$

Les coefficients de l'équation sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

Astuce : si on connaît trois points non alignés du plan (P), on pourra se servir du produit vectoriel pour trouver un vecteur normal à (P).

Courbes paramétrées

- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle donné. Lorsque la variable t décrit cet intervalle, le point M(t) de coordonnées $(f(t);g(t))$ décrit une courbe paramétrée.
  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ est la représentation paramétrique de la courbe.

Vecteur dérivé en un point

- S'il n'est pas nul, le vecteur dérivé $\overrightarrow{v(t_0)}\big(f'(t_0);g'(t_0)\big)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en $M(t_0)$.
- $f'(t_0)=0 \iff$ la courbe admet une tangente verticale en $M(t_0)$.
  $g'(t_0)=0 \iff$ la courbe admet une tangente horizontale en $M(t_0)$.
- Méthode pour tracer une courbe paramétrique :
  - rechercher l'ensemble de définition des fonctions f et g
  - réduire le domaine d'étude par périodicité et symétrie
  - faire un seul tableau de variation pour f et g
  - placer les points remarquables et les tangentes
  - joindre dans le sens des t croissants en lissant au mieux
  - compléter par les intervalles de symétrie et périodicité.

ThAt's aLL !

Ces fiches de cours ont été réalisées par
SoULiAne <cubix@caramail.com>

avec l'aide de quelques livres, du cours du prof
et de l'excellent site http://xmaths.free.fr

Faites attention tout de même et vérifiez toujours avec le cours de votre prof car je ne suis pas à l'abris des fautes de frappes !! Merci de me signaler les erreurs que vous trouverez en m'écrivant à l'adresse ci-dessus.

Ensuite, quand vous aurez le bac, vous pourrez télécharger les fiches pour le DEUG MIAS sur http://mathinfo.free.fr (c'est mon site de cours).